Exercices sur les suites de nombres réels ou complexes

① Montrer que la suite $(u_n)$ converge si et seulement si les suites $(u_{2n})$, $(u_{2n+1})$ et $(u_{3n})$ convergent. La même propriété est-elle vraie avec $(u_{3n})$, $(u_{3n+1})$, $(u_{3n+2})$ ?

② Soit $a$ un réel non multiple entier de $\pi$. Montrer que l'existence d'une limite pour la suite $u_n = \sin(na)$ équivaut à la même propriété pour la suite $v_n = \cos(na)$. En déduire que ces limites n'existent pas.
(indication : considérer $\sin(n+1)a$ et $\cos(n+1)a$ )

③ Soit $(u_n)$ une suite de nombres réels telle que $u_{n+1} - u_n \to 0$ si $n \to +\infty$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)$ est un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$.

④ Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue et $(u_n)$ une suite telle que $f(u_n) = u_{n+1}$. On suppose que $u_{n+1} - u_n \to 0$. Montrer que la suite $(u_n)$ converge. (indication : utiliser l'exercice 3).

⑤ Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $a<b$. On suppose par l'absurde que $[a,b]$ est dénombrable ; soit $(x_n)$ une énumération dénombrable de $[a,b]$. Montrer qu'on peut construire une suite décroissante d'intervalles fermés telle $[a_0,b_0] = [a,b]$, $b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n}(b-a)$ $\forall n \geq 1$, et $\forall n \geq 1$ et $p \leq n$, $x_p \notin [a_n, b_n]$. Conclure.

⑥ Soit $(u_n)$ une suite de nombres complexes. Montrer que si $u_{n+1} - u_n \to a$ $(\in \mathbb{C})$ quand $n \to +\infty$, alors $\frac{1}{n} u_n \to a$ ( on peut supposer que $(u_n)$ est une suite réelle et pour tout $\varepsilon > 0$, on pourra montrer que

$$a - \varepsilon < \limsup_{N \to +\infty} \frac{u_N}{N} \left(\text{resp. } \liminf_{N \to +\infty} \frac{u_N}{N}\right) < a + \varepsilon .$$

6 bis) Soit $(u_n)$ une suite de nombres réels que $u_{n+1} - u_n \to +\infty$ alors $\frac{1}{n} u_n \to +\infty$ (même méthode que pour l'exercice 6).

Indications bibliographiques :

Une bonne référence pour la leçon (Suites de nombres réels ou complexes : convergence, théorèmes d'existence d'une limite. Exemples et applications) est le livre de Jean Combes "Suites et Séries" PUF, 1re édition 1982. Ce livre contient des exercices mais non corrigés.

Livres d'exercices :

1) Daniel ALIBERT Exercices corrigés d'Analyse tome 1 Presses Universitaires de Grenoble, 1991. (les exercices 1 et 2 de cette feuille en sont tirés mais les exercices sur les suites sont un peu élémentaires)

2) Xavier MERLIN Methodix Analyse, Ellipses éditeur 1994 (les exercices 4 et 5 y figurent)

3) Léonhard EPISTEMON (J.L OVAERT et J.L. VERLEY) ANALYSE exercices et problèmes vol 1 Cédic - Fernand Nathan 1983 (exercices 5 et 6)